Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ MECLT ♢ MATLT ♢ AUTLT ♢ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e il versore $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Stabilire se esistono (ed in caso affermativo calcolarle) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ non esistono, mentre $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

---

2. Si considerino la funzione

$$g(x,y) = (x-y+1)\log(x-y+1)$$

e il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x-y \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

....

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]: $m = 0$ assunto sul segmento $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\,, x-y=0\}$ e $M = 2\log 2$ assunto sul segmento $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\,, x-y=1\}$

---

3. Calcolare la lunghezza L della curva Γ di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 4t^2\,\vec{i} + 4t\,\vec{j} + \log t\,\vec{k}$, $1 \le t \le e^2$.

. . . .

Risposta [3 punti]: $L = 4e^4 - 2$

---

4. Calcolare il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 2\,, 0 \le z \le x\,, |y| \le x^2\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]: 7/6

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ definita in tutto $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \arctan \frac{x}{n^\alpha}\,.$$

Al variare di α, si studi (eventualmente anche in sottointervalli) la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ e uniforme in $[0, +\infty[$.

Risposta [4 punti]: conv. puntuale a 0 per $\alpha > 0$, per $\alpha = 0$ converge banalmente a $\arctan x$, mentre con $\alpha < 0$ a $\frac{\pi}{2}$ per $x > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ per $x < 0$ 0 in $x = 0$. Convergenza uniforme in $[0, b]$ (con $b > 0$) per $\alpha > 0$, in $[a, +\infty[$ (con $a > 0$) per $\alpha < 0$.

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} + \dfrac{1}{1 + \tan^2(\frac{y}{t})} \\ y(1) = \frac{\pi}{4}\,. \end{cases}$$

. . . .

Risposta [4 punti]: $y(t) = t \arctan(\log t + 1)$

---

7. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \arctan y \\ y(0) = \beta\,. \end{cases}$$

Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale); studiare monotonia, concavità e asintoti delle soluzioni al variare di $\beta \in \mathbb{R}$

. . . .

Risposta [4 punti]: Il problema ammette un'unica soluzione globale; sempre crescente, convessa per $\beta > 0$, concava se $\beta < 0$; per $\beta = 0$ soluzione stazionaria; $y = 0$ asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ se $\beta > 0$, per $t \to +\infty$ se $\beta < 0$

8. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 1 - 2x$ e prolungata per periodicità; si calcolino i suoi coefficienti di Fourier.

. . . .

Risposta [4 punti]: $a_0 = 2$, $a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$, $b_n = (-1)^n \frac{4}{n}$.

1. Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e il versore $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Stabilire se esistono (ed in caso affermativo calcolarle) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$.

. . . .

Risposta [4 punti]: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ non esistono, mentre $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

---

2. Si considerino la funzione

$$g(x, y) = (x - y + 1) \log(x - y + 1)$$

e il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x - y \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$. Determinare il minimo m e il massimo M di g su D ed i punti in cui sono assunti.

. . . .

Risposta [Calcolo di m 2 punti, calcolo di M 2 punti]: $m = 0$ assunto sul segmento $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\,, x - y = 0\}$ e $M = 2 \log 2$ assunto sul segmento $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\,, x - y = 1\}$

---

3. Calcolare la lunghezza L della curva Γ di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 4t^2\,\vec{i} + 4t\,\vec{j} + \log t\,\vec{k}$, $1 \leq t \leq e^2$.

. . . .

Risposta [3 punti]: $L = 4e^4 - 2$

---

4. Calcolare il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2\,, 0 \leq z \leq x\,, |y| \leq x^2\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]: 7/6

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia data la seguente successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ definita in tutto $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \arctan \frac{x}{n^\alpha}\,.$$

Al variare di α, si studi (eventualmente anche in sottointervalli) la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ e uniforme in $[0,+\infty[$.

Risposta [4 punti]: conv. puntuale a 0 per $\alpha > 0$, per $\alpha = 0$ converge banalmente a $\arctan x$, mentre con $\alpha < 0$ a $\frac{\pi}{2}$ per $x > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ per $x < 0$ 0 in $x = 0$. Convergenza uniforme in $[0, b]$ (con $b > 0$) per $\alpha > 0$, in $[a, +\infty[$ (con $a > 0$) per $\alpha < 0$.

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} + \dfrac{1}{1+\tan^2(\frac{y}{t})} \\ y(1) = \frac{\pi}{4}\,. \end{cases}$$

. . . .

Risposta [4 punti]: $y(t) = t \arctan(\log t + 1)$

---

7. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \arctan y \\ y(0) = \beta\,. \end{cases}$$

Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale); studiare monotonia, concavità e asintoti delle soluzioni al variare di $\beta \in \mathbb{R}$

. . . .

Risposta [4 punti]: Il problema ammette un'unica soluzione globale; sempre crescente, convessa per $\beta > 0$, concava se $\beta < 0$; per $\beta = 0$ soluzione stazionaria; $y = 0$ asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ se $\beta > 0$, per $t \to +\infty$ se $\beta < 0$

---

8. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 1 - 2x$ e prolungata per periodicità; si calcolino i suoi coefficienti di Fourier.

. . . .

Risposta [4 punti]: $a_0 = 2$, $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $b_n = (-1)^n \frac{4}{n}$.
